Exercice 1 — 15 min — 3 pt

Répondre par Vrai ou Faux, en justifiant la réponse.

1°) Si *f* est une fonction continue sur $[a,b]$ avec $a<b$ et $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ alors $f(x)\geq 0$ pour tout $x\in[a,b]$.

2°) Si *f* et *g* sont deux fonctions continues sur $[a,b]$ avec $a<b$ et $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx$ alors *f* et *g* sont égales sur $[a,b]$.

3°) Pour tout *x* et *t* on a : $\int_0^1 t\,x^2dt=\int_0^1 t\,x^2dx$.

4°) $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin t}{t}dt=2\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}dt$.

5°) $\int_{-1}^{1}\frac{x^4\sin x}{\sqrt{1+x^2}}dt=0$.

6°) Si *f* est une fonction continue sur IR et périodique de période T alors $\int_0^{2T}f(t)dt=2\int_0^{T}f(t)dt$.

Exercice 2 — 30 min — 6 pt

Soit f la fonction définie sur IR par : $x\mapsto\frac{1}{1+x^2}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité 4 cm).

1°) Etudier les variations de *f* et tracer C_f.

2°) En utilisant la méthode des rectangles et en subdivisant l'intervalle $[0,1]$ en quatre intervalles de même amplitude, donner un encadrement de $I=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$.

3°) Soit *G* la fonction définie par $G(x)=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt$.

Montrer que *G* est dérivable sur IR et calculer $G'(x)$.

4°) Soit *H* la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par $H(x)=G(\tan x)$.

a) Montrer que $H'(x)=1$, en déduire $H(x)$ pour tout $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$.

b) Montrer alors que $I=\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt=\frac{\pi}{4}$ puis calculer $\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+t^2}dt$.

www.takiacademy.com